

بسم الله الرحمن الرحيم
مبانی برنامه سازی به زبان C / C++

پروژه پایانی

شماره ۲

درونیابی

۲-۳ نفر

امروزه یکی از مهمترین معضلات در تقریب زدن داده ها در ریاضیات کاربردی درونیابی تعدادی نقطه (ورودی) به کمک یک تابع (خروجی) می باشد. کلی ترین صورت یک مسئله درونیابی به صورت زیر است:

n نقطه x_1, \dots, x_n و y_1, \dots, y_n داده شده است. چند جمله ای $p_{n-1}(x)$ از درجه حداکثر $n-1$ را به نحوی بیابید به طوری که برای هر $0 < i \leq n$ داشته باشیم $p_{n-1}(x_i) = y_i$

برای مثال تابع $p_2(x) = 1 + 4x - 2x^2$ نقاط $(1,3)$, $(3,-5)$, $(-2,-15)$ را درونیابی می نماید. انواع مختلفی از درونیابی بر حسب کارایی و دقت آنها وجود دارند. هدف شما در این پروژه پیاده سازی چند درونیابی کارآمد می باشد.

• درونیابی به کمک ماتریس واندرموند^۱:

فرض کنید چند جمله ای $p(x)$ به صورت زیر باشد:

$$p_{n-1}(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1} = y$$

بدیهی است که با حل معادله ماتریسی زیر می توان ضرایب a_i را بدست آورد:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

حل و بررسی این ماتریس بر عهده شما!

¹ Vandermonde Matrix

- درونیابی چند جمله ای و درونیابی هرمیت مکعبی:
 درونیابی به کمک ماتریس واندوموند شیوه سرراستی برای تقریب است اما ایراد اساسی آن کندی بیش از حد است. در این راستا تقریب های بهتر و کارآمد تری ارائه شده است. نمونه از این تقریب ها تقریب هرمیت درجه سه می باشد.
 فرق اساسی این درونیابی با موارد مشابه به روش واندوموند دخیل کردن مشتقات تابع در محاسبه تابع است تا نمودار های هموارتری بدست آید.
 به صورت خلاصه در مسئله درونیابی هرمیت شما می بایست با داشتن مقادیر x_r, x_l, y_r, y_l و مقادیر مشتقات s_r, s_l که در آن r, l به ترتیب به معنای چپ و راست می باشند ضرایب a, b, c, d را در معادله زیر پیدا نمایید:

$$q(z) = a + b(z-x_L) + c(z-x_L)^2 + d(z-x_L)^2(z-x_R)$$

البته با توجه به اینکه:

$$\begin{aligned} q(x_L) &= y_L & q(x_R) &= y_R \\ q'(x_L) &= s_L & q'(x_R) &= y_R \end{aligned}$$

برای اینکار با توجه به اینکه

$$q'(z) = b + 2c(z-x_L) + d(2(z-x_L)(z-x_R) + (z-x_L)^2)$$

ضرایب a, b, c, d به آسانی بدست خواهند آمد.

² تعریف دقیق اینکه واقعاً یک نمودار هموار smooth به چه معنی می باشد را در ریاضیات ۲ فرا خواهید گرفت. در حال حاضر تنها به شهود خود در این زمینه تکیه کنید.

• درونیابی اسپلاین مکعبی:

هرمیت نمودارهای هموار و خوبی را برای ما ایجاد می کند ولی این هنوز کافی نیست. برای مثال تقریب هایی که هرمیت برای تابعی مثل $e^{-2x} \sin(10\pi x)$ به ازای تعداد نقاط متوسط ارائه می کند بسیار بد است. برای همین نوع بهتر (و البته کمی سخت تر برای شما!) درونیابی به نام اسپلاین وجود دارد که در آن تضمین شده است خود تابع و مشتق اول و مشتق دوم آن پیوسته می باشند. این شرایط با معادله زیر قابل پیاده سازی است:

$$q_i(z) = y_i + s_i(z - x_i) + \frac{y'_i - s_i}{\Delta x_i}(z - x_i)^2 + \frac{s_i + s_{i+1} - 2y'_i}{(\Delta x_i)^2}(z - x_i)^2(z - x_{i+1})$$

برای آنکه مشتق دوم پیوسته باشد باید داشته باشیم:

$$q''_i(x_{i+1}) = \frac{2}{\Delta x_i}(2s_{i+1} + s_i - 3y'_i)$$

$$q''_{i+1}(x_{i+1}) = \frac{2}{\Delta x_{i+1}}(-2s_{i+1} - s_{i+2} + 3y'_{i+1})$$

اگر کمی دقت کنید با کمک عبارت بالا می توان همه ضرایب s_i را به جز s_1 و s_n تعیین کنیم. شرایط اولیه ای که بر s_1 و s_n اعمال می شوند به ایجاد سه دسته اسپلاین مختلف می انجامند:

۱. اسپلاین کامل

در این اسپلاین مقدار s_1 و s_n مستقیماً داده می شود.

۲. اسپلاین طبیعی

مقادیر s_1 و s_n برابر با صفر خواهد بود.

۳. اسپلاین NaK

در این نوع اسپلاین مقادیر s_1 و s_n با اعمال مشتق سوم به شکل

$$q'''_i(x) = 6 \frac{s_i + s_{i+1} - 2y'_i}{(\Delta x_i)^2}$$

بدست می آیند.

برای اهداف این پروژه تنها پیاده سازی اسپلاین طبیعی کافی است.

ورودی/خروجی:

ورودی خود را از **standard input** بخوانید و خروجی تان را بر روی **standard output** بنویسید.^۳

۱. ورودی برنامه:

ورودی برنامه شما ابتدا عدد n (تعداد نقاط) و بعد از آن n زوج نقطه به شکل X_i, Y_i می باشد.

۲. خروجی های برنامه:

■ برنامه شما می بایست درونیایی نقاط ورودی را به کمک ماتریس واندرموند، روش هرمیت و یکی از اسپلاین ها درونیایی کند. توجه کنید که باید هر سه درونیایی را پیاده سازی نمایید. در میان اسپلاین ها هیچکدام اولویتی بر دیگری ندارند. برای همین توصیه می کنیم از اسپلاین طبیعی که راحتتر است استفاده کنید. در انتها سه چند جمله ای که حاصل از درونیایی نقاطه هستند را بنویسید.

۳. قابلیت های اضافی:

- پیاده سازی موارد زیر مشمول نمره اضافی خواهد بود:
 - استفاده از روش نیوتن برای درونیایی.
 - کشیدن نمودار چند جمله ای درونیایی شده بر روی صفحه مانیتور با کمک کتابخانه های گرافیکی موجود برای C/C++

• توجه بسیار مهم:

برنامه شما باید در زمان تحویل کمپایل و اجرا شود و بتواند برای تست های ورودی خروجی صحیح ایجاد کند.

کد منبع پروژه خودتان را به همراه مستندات مربوط به آن را در غالب یک فایل فشرده^۴ به نام **interpolation** تا زمان تحویل به آدرس ce153c@gmail.com ارسال نمایید. فیلد **subject** نامه خود را برابر با **Project2-interpolation-(8510xxxx-8510xxxx)** قرار دهید که در آن **xxxx** چهار رقم انتهایی شماره دانشجویی اعضای تیم شما می باشد.

موفق باشید.

^۳ برای این کار از **header file** های **stdio.h** (برای زبان C) و **iostream** (برای زبان C++) استفاده کنید.

^۴ با فرمت **rar** یا **zip** یا **tar**