

بسمه تعالی

نیمسال دوم ۹۲-۹۱

مدرس: سلیمانی

نمره از ۵+۵۰

الگوشناسی آماری ۷۲۵-۴۰ (گروه ۲)

تمرین سری ششم: مدل مخفی مارکوف

موعد تحویل: ۱۲ خرداد ۹۲

سوال ۱ (۱۸ نمره): سوالات کوتاه

۱.۱. (۱۰ نمره) در هر یک از موارد زیر (با توضیح مختصر) مشخص کنید آیا استفاده از HMM برای مدل کردن داده‌ها می‌تواند گزینه‌ای مناسب باشد یا نه. همچنین اگر HMM مناسب است مشخص کنید مشاهده در هر گام زمانی چیست.

- داده‌های مربوط به مشخصات هوا (دما، رطوبت، ...) در روزهای مختلف سال
- نمونه‌هایی از یک کلمه‌ی دست‌نوشته که از طریق قلم نوری دریافت شده
- ارزش سهام شرکت‌های مختلف در یک روز
- تصاویر اسکن شده‌ی دست‌نوشته یک حرف
- مدل کردن یک مجموعه متون به هدف پیدا کردن نقش کلمات در داخل متن

۲.۱. (۸ نمره) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را به صورت مستدل مشخص نمایید:

- فرض کنید مجموعه‌ای از مشاهدات (observations) در اختیار داریم. در هنگام یادگیری HMM هرچه تعداد حالات مخفی (hidden states) را بالاتر ببریم، با پارامترهای حاصل از آموزش به مقدار درست‌نمایی (likelihood) بالاتری روی داده‌های آموزش خواهیم رسید.
- در فرایند آموزش HMM با الگوریتم EM، چنانچه در مقداردهی اولیه بعضی از درایه‌های موجود در بردار π یا ماتریس A صفر باشند، این مقادیر در طول اجرای الگوریتم EM همچنان صفر باقی می‌مانند.

سوال ۲ (۱۰ نمره): الگوریتم Forward-Backward

فرض کنید مقادیر α و β به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\alpha_t(k) = P(o_1, o_2, \dots, o_t, S_t = k), \quad t = 1, \dots, T, \quad k = 1, \dots, N$$

$$\beta_t(k) = P(o_{t+1}, o_{t+2}, \dots, o_T | S_t = k), \quad t = 1, \dots, T, \quad k = 1, \dots, N$$

چنانچه $\gamma_t(k)$ و $\xi_t(j, k)$ به صورت زیر تعریف شوند:

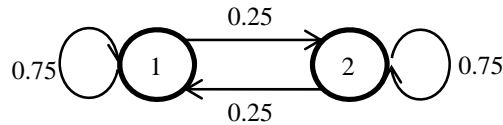
$$\gamma_t(k) = P(S_t = k | o_1, o_2, \dots, o_T), \quad t = 1, \dots, T, \quad k = 1, \dots, N$$

$$\xi_t(j, k) = P(S_{t-1} = j, S_t = k | o_1, o_2, \dots, o_T), \quad t = 1, \dots, T, \quad j, k = 1, \dots, N$$

- (۴ نمره) رابطه‌ی مربوط به $\gamma_t(k)$ بر حسب مقادیر α و β را پیدا کنید (می‌توانید به اسلایدهای ۲۷ و ۲۸ مراجعه کنید).
- (۶ نمره) چنانچه بخواهیم برای محاسبه‌ی سریع مقادیر $\xi_t(j, k)$ از روشی مشابه بند (a) استفاده نماییم، مقادیری که باید محاسبه و ذخیره شوند و نحوه‌ی محاسبه‌ی نهایی $\xi_t(j, k)$ را مشخص کنید.

سوال ۳ (۱۷ نمره): به کارگیری HMM برای دنباله‌ی DNA

یک دنباله‌ی DNA از تعدادی اسید آمینه تشکیل شده که از مجموعه $\{A, C, G, T\}$ انتخاب می‌شوند. فرض کنید برای مدل کردن DNA از یک HMM با یک متغیر نهان که می‌تواند دو حالت مختلف 1 و 2 را نشان دهد، استفاده شود:



اگر احتمال مشاهدات در دو حالت به صورت زیر باشد:

$$P(A|1) = 0.4, P(C|1) = 0.1, P(G|1) = 0.3, P(T|1) = 0.2$$

$$P(A|2) = 0.1, P(C|2) = 0.4, P(G|2) = 0.2, P(T|2) = 0.3$$

و احتمال شروع در دو حالت برابر باشد ($\pi_1 = \pi_2 = 0.5$).

چنانچه دنباله‌ی مشاهدات O برابر با $AGTCTA$ باشد:

(a) (۵ نمره) با استفاده از الگوریتم جلورو (forward) همه‌ی مقادیر α مورد نیاز را محاسبه نموده و $P(O|\theta)$ را حساب کنید

(θ مجموعه پارامترهای مدل را مشخص می‌کند).

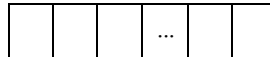
(b) (۶ نمره) با استفاده از الگوریتم جلورو-عقب‌رو (forward-backward)، و با مشخص نمودن همه‌ی مقادیر α و β

مورد نیاز، $P(S_t = 1|O, \theta)$ را به ازای $t = 1, \dots, 6$ محاسبه نمایید.

(c) (۶ نمره) با استفاده از الگوریتم Viterbi محتمل‌ترین دنباله از حالت‌ها برای این دنباله‌ی مشاهدات را پیدا کنید.

سوال ۴ (۱۰ نمره): تشخیص محل روبات

فرض کنید یک روبات در هر لحظه در یکی از خانه‌های محیط N خانه‌ای زیر قرار گرفته است:



همچنین روبات در هر گام زمانی یک خانه به چپ یا به راست حرکت می‌کند یا سر جای خود می‌ماند. خانه‌ای که روبات در آن قرار می‌گیرد روشن (1) و سایر خانه‌های محیط خاموش (0) هستند. ورودی مساله ما تصویری است که از این N خانه ثبت می‌شود که البته در جریان تصویربرداری یک نویز گوسی با توزیع $N(0,0.5)$ با هر خانه جمع می‌شود. هدف مساله آن است که دنباله‌ی تصاویر دریافتی را بگیرد و محل روبات را در هر گام زمانی مشخص نماید.

(a) (۳ نمره) یک مدل HMM مناسب برای این مساله معرفی نمایید. مشاهدات، حالات و مدل احتمالی آن را مشخص نمایید.

(b) (۴ نمره) چنانچه بدانیم روبات در هر لحظه با احتمال 0.4 به چپ و 0.4 به راست می‌رود و با احتمال 0.2 در سر جای

خود می‌ایستد و همچنین در لحظه شروع در سمت چپ‌ترین خانه قرار دارد، چگونه با دریافت دنباله‌ای از تصاویر تا یک

گام زمانی، می‌توان محل روبات را در گام مربوطه پیدا کرد؟ اگر با دریافت دنباله‌ی تصاویر، هدف پیدا کردن محتمل‌ترین

مسیری باشد که روبات تا آن لحظه پیموده است، از چه تکنیکی استفاده می‌شود؟

(c) (۳ نمره) چنانچه احتمالی‌هایی که در قسمت قبل گفته شد مشخص نباشند و همچنین معلوم نباشد که محل اولیه روبات

کجاست، چگونه می‌توان محل روبات را در هر گام (با دریافت دنباله از تصاویر تا آن گام) پیدا کرد؟

موفق باشید