بسمه تعالی

فرایندهای تصادفی

نیم‌سال اول ۹۴-۹۳

دکتر ربیعی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

تمرین اول | مروری بر مباحث احتمال | زمان تحویل: ۱۲ مهر

---

۱. فرض کنید A وB دو پیشامد با احتمال های $P(A) = \frac{2}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{2}$ باشند.
آ) بیشترین مقداری که $P(A \cap B)$ می تواند بگیرد چیست؟ کمترین مقدار آن چیست؟ مثالی برای هر دو حالت ارائه نمایید.
ب) بیشترین مقداری که $P(A \cup B)$ می تواند بگیرد چیست؟ کمترین مقدار آن چیست؟ مثالی برای هر دو حالت ارائه نمایید.

۲. فرض کنید n توپ به سمت b سطل پرتاب می شوند به طوری که هر توپ با احتمال مساوی در یکی از سطل ها می افتد و پرتاب ها مستقل از یک دیگر می باشند.
آ)احتمال این که یک توپ خاص در یک سطل مشخص بیفتد چقدر است؟
ب) امید ریاضی تعداد توپ های فرود آمده در یک سطل مشخص چقدر است؟
پ)امید ریاضی تعداد توپ های پرتاب شده تا زمانی که یک سطل مشخص یک توپ داشته باشد، چقدر است؟
ت)امید ریاضی تعداد توپ های پرتاب شده تا زمانی که همه‌ی سطل‌ها یک توپ داشته باشند، چقدر است؟
در دو قسمت اخیر فرض کنید که $n >> b$ است.

۳. اگر $A_1, A_2, \cdots, A_k$ پیشامدهایی با شرط $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) > 0$ باشند، ثابت کنید:

$$P(\bigcap_{i=1}^{k} A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)p(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1})$$

۴. تابع با ضابطه ی زیر را در نظر بگیرید:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x + \frac{1}{2} & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

آ) $F(x)$ را رسم نموده و نشان دهید که $F(x)$ خصوصیات یک CDF را دارد.
ب) اگر X یک متغیر تصادفی که CDF آن تابع $F(x)$ است، باشد، مقادیر زیر را بیابید:
۱. $P(0 < X < \frac{1}{4})$
۲. $P(X = 0)$
۳. $P(0 \leq X \leq \frac{1}{4})$

۵. نشان دهید تابع $p(x)$ با ضابطه‌ی

$$p(x) = \begin{cases} a(\frac{2}{5})^x & x = 0, 1, 2, \ldots. \\ 0 & Otherwise. \end{cases}$$

یک PMF برای متغیر تصادفی X است (با پیدا کردن مقدار a). سپس مقادیر خواسته شده در زیر را حساب کنید:
آ) $P(X = 2)$
ب) $P(X \leq 2)$
پ) $P(X \geq 1)$

۶. فرض کنید C یک مجموعه از زیرمجموعه‌های S باشد، ثابت کنید یک $Borelfield$ کمینه که تمامی اعضای C را در بردارد، وجود دارد.

۷. توزیع $f_Y(y)$ را برای متغیر تصادفی $Y = g(X)$ بر حسب $f_X(x)$ تحت شرایط زیر به دست بیاورید:
آ) $g(x) = |x|$
ب) $g(x) = e^{-x}U(x)$
پ) $g(x) = x^۲$

۸. دو متغیر تصادفی X و Y به صورت $Y = \frac{۱}{X}$ با هم رابطه دارند. X به طور یکنواخت در بازه ی $[-۲, ۳]$ توزیع شده است. CDF و PDF برای Y را پیدا کنید.

۹. X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با $N = ۵$ و $P = \frac{۲}{۳}$ است. تابع چگالی احتمال را برای $Y = X^۲$ به دست بیاورید.

۱۰. فرض کنید که $(X، Y)$دارای توزیع یکنواخت در ناحیه‌ی $۰ \leq y \leq ۱ - x^۲$ و $-۱ \leq x \leq ۱$ باشد،
آ)توزیع حاشیه ای X و Y را به دست آورید.
ب)دو توزیع شرطی $f_{X|Y}(x|y)$ و $f_{Y|X}(y|x)$ را پیدا کنید.

۱۱. X و Y دو متغیر تصادفی هستند:
آ) ثابت کنید اگر X و Y مستقل از هم باشند، ناهمبسته نیز هستند.
ب) مثالی ارائه کنید که در آن X و Y ناهمبسته باشند ولی مستقل از هم نباشند.
پ) اگر X و Y توزیع نرمال با واریانس یکسان داشته و از هم مستقل باشند، ثابت کنید که $X - Y$ و $X + Y$ مستقل هستند.

۱۲. برای هر دو متغیر تصادفی X و Y نشان دهید:
آ) $E[E[X|Y]] = E[X]$
ب) $var(X) = E[var(X|Y)] + var(E[X|Y])$

۱۳. فرض کنید X و Y متغیر تصادفی باشند. نشان دهید که تابع h که مقدار $E[(X - h(Y))^۲]$ را کمینه می کند، به صورت زیر به دست می آید:

$$h(y) = E[X|Y = y]$$

فرض کنید که $E[X^۲] < \infty$ باشد.

۱۴. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع توأم نرمال دو بعدی با پارامترهای $(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^۲, \sigma_y^۲, \rho)$ باشند، توزیع های زیر را به دست آورید:
آ) توزیع حاشیه‌ای$(marginal)$ X و توزیع حاشیه‌ای Y
ب) توزیع شرطی Y به شرط $X = x$
پ) به ازای مقادیر ثابت a و b، توزیع $aX + bY$

۱۵. اگر X و Y متغیرهای تصادفی با تابع توزیع احتمال توأمی به شکل زیر باشند:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{۲e^{-۲x}}{x} & ۰ \leq x < \infty, ۰ \leq y < x \\ ۰ & Otherwise. \end{cases}$$

Cov(X،Y) را محاسبه نمایید.

۱۶. فرض کنید متغیر تصادفی Y توزیعی دوجمله‌ای با n آزمایش و احتمال موفقیت X دارد، که در آن n یک جمله ی ثابت و X یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ است. موارد خواسته شده را بیابید:
آ) $E(Y)$ و $var(Y)$
ب) توزیع توأم X و Y
پ)توزیع حاشیه‌ای Y

۱۷. سوال‌های ۲۷-۵ و ۳۵-۵ از کتاب Papoulis .