



۱. نشان دهید هر یک از توابع زیر می‌تواند تابع کواریانس یک فرآیند stationary باشد، یا خیر؟

$$r(\tau) = \frac{\sin \tau}{\tau}$$

$$r(\tau) = \frac{\sin \tau}{\tau^2}$$

$$r(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ 2 & \tau = 1 \\ 0.5 & \tau = 2 \\ 0 & O.W \end{cases}$$

$$r(\tau) = \cos \tau$$

$$r(\tau) = e^{|\tau|}$$

۲. تابع CDF مرتبه‌ی دوم برای فرآیند تصادفی $X(t) = A \cos(\omega t)$ را بیابید. که در آن A متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه $[0, 1]$ و ω یک مقدار ثابت می‌باشد.

۳. متغیر تصادفی v با توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ می‌باشد. دو فرآیند تصادفی $X(t) = u(t-v)$ و $Y(t) = \delta(t-v)$ را در نظر بگیرید.

الف) هر یک از دو فرآیند بالا را با رسم یک sample path توصیف کنید.

ب) مقادیر امید ریاضی را برای هر یک از فرآیندهای بالا محاسبه کنید.

ج) مقادیر $R_{XX}(t_1, t_2)$ ، $R_{YY}(t_1, t_2)$ ، $R_{XY}(t_1, t_2)$ را محاسبه نمایید.

۴. فرض کنید که $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ یک فرآیند WSS و نرمال با میانگین صفر و تابع autocorrelation زیر باشد:

$$R_{X(\tau)} = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T} & -T < \tau < T \\ 0 & O.w \end{cases}$$

در صورتی که $\{X(t_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ یک دنباله از n نمونه‌ی ثبت شده از فرآیند بالا در زمان‌های زیر باشد:

$$t_i = i \frac{T}{2} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

مقدار میانگین و واریانس را برای میانگین نمونه‌های بالا μ_n بیابید:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X(t_i)$$

۵. دنباله‌ی Z_1, Z_2, Z_3, \dots از متغیرهای تصادفی i.i.d را در نظر بگیرید، که برای هر یک

$$P(Z_i = 1) = p$$

و

$$P(Z_i = -1) = 1 - p = q$$

می‌باشد. X_n را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$X_n = \sum_{i=1}^n Z_i \quad n = 1, 2, \dots$$

که $X_0 = 0$. مجموعه‌ی متغیرهای تصادفی بالا یک فرآیند تصادفی را تشکیل می‌دهد، که یک گام تصادفی ساده نامیده می‌شود.

الف) مثالی از یک آزمایش که تشکیل یک گام تصادفی را دهد، ارائه دهید.

ب) میانگین و واریانس $X[n]$ را بیابید.

ج) تابع autocorrelation فرآیند $X[n]$ را محاسبه کنید.

۶. فرض کنید:

$$X(t) = \sin(Ut)$$

که در عبارت بالا U یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ است. نشان دهید:

الف) $\{X(t) | t \in \{1, 2, \dots\}\}$ یک فرآیند WSS است.

ب) $\{X(t) | t \in [0, \infty)\}$ یک فرآیند WSS و SSS نمی‌تواند باشد.

۷. گزاره‌های زیر را اثبات کنید:

الف) اگر یک فرآیند نرمال WSS باشد، آنگاه SSS نیز هست.

ب) اگر یک فرآیند SSS از درجه‌ی n باشد آنگاه در تمام درجه‌های کمتر از n هم SSS است.

۸. $X[n], Y[n]$ دو فرآیند تصادفی WSS می‌باشند. در صورتی که هر متغیر تصادفی از فرآیند $X[n]$ از هر یک از متغیرهای

تصادفی $Y[n]$ مستقل باشد، نشان دهید که آیا هر یک از فرآیندهای زیر WSS است و یا خیر. در صورت مثبت بودن پاسخ

میانگین و دنباله‌ی autocorrelation آن را بیابید.

$$Z[n] = X[n] + Y[n] \quad \text{الف)}$$

$$Z[n] = X[n] * Y[n] \quad \text{ب)}$$

۹. $\{X_n, n \geq 0\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی i.i.d با میانگین صفر و واریانس یک است. نشان دهید $\{X_n, n \geq 0\}$

یک فرآیند WSS است.

۱۰. فرآیند $X(t)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$X(t) = U \cos(t) + V \sin(t) \quad -\infty < t < \infty$$

که در آن U, V متغیرهای تصادفی مستقل هستند، که مقدار ۱ را به احتمال $\frac{1}{3}$ و مقدار ۲ - را به احتمال $\frac{2}{3}$ می پذیرند. نشان دهید که $\{X_n, n \geq 0\}$ یک فرآیند WSS است ولی SSS نیست.

۱۱. $X(t)$ یک نویز سفید گاوسی است. تابع autocorrelation فرآیند زیر را را بیابید.

$$Y(t) = \int_0^t X(\alpha) d\alpha$$

۱۲. سوالات ۹-۲۷، ۹-۲۲، ۹-۲۰، ۹-۱۳، ۹-۱۲ از کتاب اصلی درس (Paupolis) را حل کنید.