



## فرآیندهای تصادفی

نیمسال اول ۹۴-۹۳  
دکتر ربیعی

زمان تحویل: ۹ آبان ماه

سیستم‌های LTI

تمرین سوم

۱. اگر  $X(t)$  و  $Y(t)$  دو فرآیند تصادفی زمان-پیوسته و  $WSS$  توأم باشند، نشان دهید:

$$R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau) \quad (\text{آ})$$

$$|R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_X(\cdot)R_Y(\cdot)} \quad (\text{ب})$$

$$|R_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2}[R_X(\cdot) + R_Y(\cdot)] \quad (\text{ج})$$

۲. برای یک فرآیند تصادفی حقیقی  $X(t)$  که  $WSS$  است. اگر  $R_X(\tau)$  تابع Autocorrelation و  $S_X(w)$  تابع Power Spectral Density آن باشند:

(آ) نشان دهید که  $S_X(w)$  تابعی حقیقی است.

(ب) نشان دهید  $S_X(w)$  تابعی زوج است.

۳. اگر  $X(t)$  یک فرآیند تصادفی گوسی زمان-پیوسته، با Power Spectral Density بصورت  $S_X(w) = 2\pi e^{-\pi|w|}$  باشد. فرآیند  $Y(t)$  را بصورت  $Y(t) = X(t) + 3X'(t) - 2X(t-1)$  تعریف می‌کنیم. مقدار  $P(Y(t) > 2)$  را محاسبه نمایید.

۴. فرض کنید،  $Y(n) = X(n) + W(n)$  باشد که در آن  $X(n) = A$  است که  $A$  یک متغیر تصادفی با میانگین صفر و واریانس  $\sigma_A^2$  می‌باشد.  $W(n)$  نیز یک فرآیند نویز سفید با متوسط انرژی  $\sigma^2$  است. همچنین فرض کنید که  $X(n)$  و  $W(n)$  مستقل هستند.

(آ) نشان دهید که  $Y(n)$  یک فرآیند تصادفی  $WSS$  است.

(ب) مقادیر  $S_Y(w)$  و  $S_{XY}(w)$  را بیابید.

۵. فرض کنید فرآیندهای تصادفی  $X(t)$  و  $Y(t)$  بصورت زیر تعریف شده‌اند.

$$X(t) = U \cos w.t + V \sin w.t$$

$$Y(t) = V \cos w.t - U \sin w.t$$

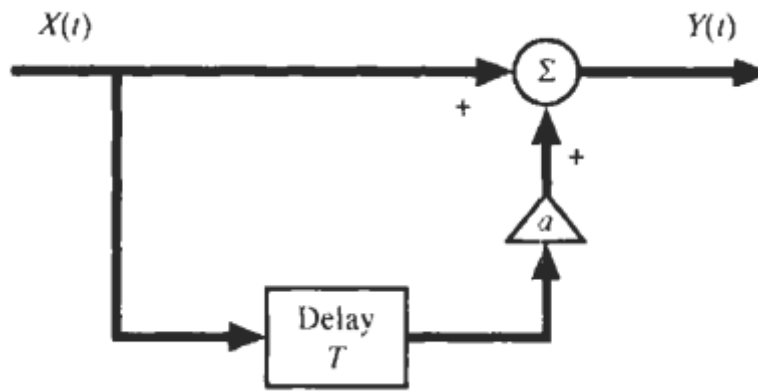
که  $w$  یک ثابت است و  $U$  و  $V$  متغیرهای تصادفی مستقل هستند که هر دو دارای میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2$  هستند.

(آ) تابع همبستگی توأم (Cross-correlation) را برای  $X(t)$  و  $Y(t)$  بدست آورید.

(ب) تابع  $S_{XY}(w)$  را بدست آورید.

۶. یک سیستم LTI با تابع سیستم بصورت  $H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 13}$  در نظر بگیرید. فرض کنید که یک فرآیند تصادفی  $X(t)$  را به عنوان ورودی به این سیستم می‌دهیم. با فرض اینکه  $X(t)$  یک فرآیند  $WSS$  با  $E[X^2(t)] = 10$  باشد.  $S_X(w)$  را بگونه‌ای بیابید که متوسط انرژی خروجی بیشینه گردد.

۷. فرض کنید که ورودی فیلتر زیر یک فرآیند نویز سفید باشد. تابع Power Spectral Density را برای فرآیند  $Y(t)$  بیابید.  $(S_Y(w))$



۸. فرض کنید،  $X(t)$  یک فرآیند گوسی با میانگین صفر و تابع Autocorrelation بصورت  $R_X(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$  که در آن  $\alpha > 0$ . این سیگنال را به عنوان ورودی به یک فیلتر بصورت زیر می‌دهیم.

$$H(w) = \frac{\beta}{\beta + jw}$$

و خروجی  $Y(t)$  را دریافت می‌کنیم.

(آ) توابع  $S_X(w)$  و  $S_Y(w)$  را بدست آورید.

(ب) متوسط انرژی ورودی و خروجی را محاسبه کرده و ارزیابی نمایید.

(ج) تابع چگالی احتمال  $f_Y(t)$  را محاسبه نمایید.

۹. فرض کنید  $Y(t)$  خروجی یک سیستم خطی با پاسخ ضربه  $h(t)$  و ورودی  $X(t) + N(t)$  باشد. همچنین فرض کنید که  $Z(t) = X(t) - Y(t)$  باشد.

(آ)  $R_{XY}(\tau)$  و  $R_Z(\tau)$  را بیابید.

(ب) مقدار  $S_Z(w)$  را بیابید.

(ج) مقدار  $S_Z(w)$  را بیابید در صورتی که  $X(t)$  و  $N(t)$  فرآیندهای تصادفی مستقل باشند.

۱۰. فرض کنید،  $Y(t)$  یک فرآیند  $WSS$  با میانگین صفر و تابع autocorrelation بصورت  $R_{YY}(\tau) = R_{YY}^+(\tau)$  باشد و داشته باشیم:

$$R_{YY}^+(\tau) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{s_i \tau} & \text{if } \tau > 0 \\ 0 & \text{if } \tau < 0 \end{cases}$$

که  $s_i$  ها اعداد منفی حقیقی هستند. آیا  $Y(t)$  یک فرآیند mean-ergodic است؟

۱۱. فرآیند تصادفی  $X(t) = B + A \sin(\omega t + \phi)$  در نظر بگیرید که در آن  $A$  و  $B$  و  $\phi$  متغیرهای تصادفی یکنواخت به ترتیب در بازه‌های  $(0, 1]$  و  $(0, 2\pi]$  و  $(0, 2\pi]$  می‌باشند. نشان دهید که این فرآیند mean-ergodic است یا نه؟

۱۲. سوالات ۹-۴۳، ۹-۴۲، ۹-۳۲، ۹-۲۹ از کتاب اصلی درس (Paupolis) را حل کنید.